

راهنمای استفاده از کتاب

■ برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید. ■

فیلم آموزشی

گام

اول

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Code های صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

درسنامه آموزشی

گام

دوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.

پرسش‌های تشریحی

گام

سوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام

چهارم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. اگر وقت کافی برای حل همه تست‌ها را ندارید، سؤال‌های (☆) و اگر دنبال تست‌های خفن‌تر و درصد ۱۰۰ هستی، سؤال‌های (★) را حتماً حل کنید.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.

■ به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید ■

FILM

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

37 min	جلسه اول: استدلال ریاضی	80 min	جلسه دهم: حل تمرین های کتاب درسی
25 min	جلسه دوم: اثبات با در نظر گرفتن همه حالت ها	52 min	جلسه یازدهم: هم نهشتی در اعداد صحیح (قسمت اول)
24 min	جلسه سوم: اثبات غیرمستقیم	42 min	جلسه دوازدهم: هم نهشتی در اعداد صحیح (قسمت دوم)
40 min	جلسه چهارم: اثبات های بازگشتی - گزاره های هم ارز	37 min	جلسه سیزدهم: هم نهشتی در اعداد صحیح (قسمت سوم)
36 min	جلسه پنجم: حل تمرین های کتاب درسی	14 min	جلسه چهاردهم: معادله هم نهشتی
85 min	جلسه ششم: بخش پذیری در اعداد صحیح	8 min	جلسه پانزدهم: حل معادلات سیاله و کاربردهای آن
32 min	جلسه هفتم: بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک و...		جلسه شانزدهم: تبدیل یک معادله سیاله به
21 min	جلسه هشتم: قضیه تقسیم	28 min	یک معادله هم نهشتی
33 min	جلسه نهم: افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک تقسیم	84 min	جلسه هفدهم: حل تمرین های کتاب درسی

فصل دوم: گراف و مدل سازی

75 min	جلسه هجدهم: گراف (قسمت اول)	82 min	جلسه بیست و یکم: مدل سازی با گراف (قسمت اول)
92 min	جلسه نوزدهم: گراف (قسمت دوم)	70 min	جلسه بیست و دوم: مدل سازی با گراف (قسمت دوم)
68 min	جلسه بیستم: حل تمرین های کتاب درسی	90 min	جلسه بیست و سوم: حل تمرین های کتاب درسی

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

28 min	جلسه بیست و چهارم: یادآوری و تکمیل	42 min	جلسه بیست و نهم: حل تمرین های کتاب درسی (قسمت اول)
86 min	جلسه بیست و پنجم: جایگشت های با تکرار	54 min	جلسه سی ام: حل تمرین های کتاب درسی (قسمت دوم)
55 min	جلسه بیست و ششم: مربع لاتین	49 min	جلسه سی و یکم: اصل شمول و عدم شمول (قسمت اول)
67 min	جلسه بیست و هفتم: دو مربع لاتین متعامد	61 min	جلسه سی و دوم: اصل شمول و عدم شمول (قسمت دوم)
	جلسه بیست و هشتم: یک روش برای ساختن دو	71 min	جلسه سی و سوم: اصل لانه کبوتری
24 min	مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد	72 min	جلسه سی و چهارم: حل تمرین های کتاب درسی

فهرست مطالب

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

قسمت اول: استدلال ریاضی

قسمت دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

قسمت سوم: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) ...

قسمت چهارم: قضیه تقسیم

قسمت پنجم: همنهشتی در اعداد صحیح. کلاس‌های ...

قسمت ششم: قوانین بخش پذیری. باقی‌مانده اعداد ...

قسمت هفتم: معادله هم‌نهشتی. تقویم‌نگاری ...

آموزش	کنکور	امتحان
۱۰	۸۱	۱۸۵
۱۳	۸۳	۱۸۷
۲۰	۸۴	۱۸۸
۲۳	۸۶	۱۸۹
۲۶	۸۷	۱۹۰
۳۰	۹۰	۱۹۱
۳۶	۹۴	۱۹۲

فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

قسمت اول: مقدمات گراف. تعاریف اولیه. دنباله درجات

قسمت دوم: شمارش گراف‌ها

قسمت سوم: گراف کامل. مکمل گراف. گراف منتظم

قسمت چهارم: مسیر. دور. گراف همبند

قسمت پنجم: مدل‌سازی در گراف و احاطه‌گری

۴۲	۱۲۵	۲۰۷
۴۶	۱۲۷	۲۰۸
۴۸	۱۲۸	۲۰۹
۵۲	۱۳۰	۲۱۰
۵۷	۱۳۳	۲۱۱

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

قسمت اول: جایگشت

قسمت دوم: توزیع n شیء یکسان

قسمت سوم: مربع لاتین

قسمت چهارم: اصل شمول و عدم شمول. تعداد توابع

قسمت پنجم: اصل لانه کبوتری

۶۳	۱۵۵	۲۲۱
۶۶	۱۵۶	۲۲۱
۶۹	۱۵۸	۲۲۲
۷۴	۱۶۱	۲۲۳
۷۹	۱۶۳	۲۲۴

قسمت دوم

بخش پذیری در اعداد صحیح

فصل

۱

بخش پذیری

تقسیم، ابزاری است برای قرار دادن تعدادی شیء، در دسته‌های مساوی. چه بهتر که در دسته‌بندی ما باقی‌مانده‌ای وجود نداشته باشد. مثلاً $10 = 2 \times 5$ یعنی ۱۰ شیء را می‌توان به ۵ دسته دوتایی تقسیم کرد (۱۰ بر ۲ بخش پذیر است). این تقسیم‌بندی را می‌توان به این شکل نگاه کرد که: ۱۰ شیء را می‌توان در ۵ دسته دوتایی شمرد، به بیان دیگر می‌گوییم عدد ۲، عدد ۱۰ را می‌شمارد.

$$a = bq$$

تعریف عدد صحیح a را بر عدد صحیح و ناصفر b بخش پذیر گوییم، هرگاه عددی صحیح مانند q چنان یافت شود که: بخش پذیری a بر b را می‌توان به صورت $b \mid a$ نشان داد و به یکی از صورت‌های زیر خواند:

(۱) عدد b ، عدد a را می‌شمارد (عاد می‌کند).

(۲) a بر b بخش پذیر است (a مضرب b است یا b مقسوم‌علیه a است).

تذکر در تمام مباحث نظریه اعداد، با اعداد صحیح کار می‌کنیم و همواره منظور از عدد، عدد صحیح است.

تذکر اگر عدد b ، عدد a را عاد نکند (a بر b بخش پذیر نباشد)، می‌نویسیم $b \nmid a$

کدام گزینه صحیح نیست؟

$$7 \mid 91 \quad (4)$$

$$14 \mid 7 \quad (3)$$

$$6 \mid 72 \quad (2)$$

$$7 \mid 42 \quad (1)$$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

$$1) \quad 42 = 6 \times 7 \Rightarrow 7 \mid 42 \quad \checkmark$$

$$2) \quad 72 = 6 \times 12 \Rightarrow 6 \mid 72 \quad \checkmark$$

$$3) \quad 14 \text{ مقسوم‌علیه } 7 \text{ نیست و این رابطه نادرست است}$$

$$4) \quad 91 = 7 \times 13 \Rightarrow 7 \mid 91 \quad \checkmark$$

پس جواب گزینه (۳) است.

به ازای چند عدد طبیعی n ، داریم $n - 2 \mid 6$ ؟

$$3 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

پاسخ: برای آن که $n - 2 \mid 6$ ، باید $n - 2$ مقسوم‌علیه ۶ باشد. یعنی:

$n - 2$	-۱	۱	-۲	۲	-۳	۳	-۴	۴
n	۱	۳	۰	۴	-۱	۵	-۴	۸

در نتیجه برای n ، مقدار طبیعی $\{1, 3, 4, 5, 8\}$ وجود دارد و جواب گزینه (۲) است.

اگر $ac = bd$ باشد، کدام گزینه درست است؟

$$a \mid bd \quad (4)$$

$$ac \mid b \quad (3)$$

$$a \mid b \quad (2)$$

$$a \mid c \quad (1)$$

پاسخ: در تساوی $ac = bd$ اگر فرض کنیم $c = q$ ، در این صورت داریم:

$$bd = a \times q \Rightarrow a \mid bd$$

پس جواب گزینه (۴) است. اما برای رد سایر گزینه‌ها تساوی $\frac{2}{a} \times \frac{3}{c} = \frac{1}{b} \times \frac{6}{d}$ را در نظر بگیرید:

$$1) \quad 2 \nmid 3 \Rightarrow a \nmid c, \quad 2) \quad 2 \nmid 1 \Rightarrow a \nmid b, \quad 3) \quad 6 \nmid 1 \Rightarrow ac \nmid b$$

ویژگی‌های رابطه عادی کردن

$$\circ | a \Rightarrow a = \circ$$

$$(\forall a \in \mathbb{Z}) : a | \circ$$

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a | a$$

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \pm 1 | a$$

$$a | 1 \Rightarrow a = \pm 1 \quad \text{یا} \quad a | -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\circ | \circ$$

ویژگی (۱): عدد صفر، هیچ عددی را نمی‌شمارد، جز خودش. به عبارت دیگر:

توجه هر عددی صفر را عاد می‌کند:

ویژگی (۲): هر عددی خودش را می‌شمارد. یعنی:

ویژگی (۳): اعداد ۱ و -۱ هر عددی را می‌شمارند. یعنی:

ویژگی (۴): اگر عددی ۱ یا -۱ را بشمارد، آن‌گاه آن عدد برابر با ± 1 است، یعنی:

ویژگی (۵):

۱۴

منحنی به معادله $y = \frac{-1}{5-2x}$ از چند نقطه با مختصات صحیح (طول و عرض صحیح) می‌گذرد؟

۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: برای این‌که $y \in \mathbb{Z}$ باشد، باید $\frac{-1}{5-2x} \in \mathbb{Z}$ باشد و به عبارت دیگر $5-2x | -1$ (برای آن‌که حاصل یک کسر عددی صحیح شود، باید صورت آن بر مخرجش بخش پذیر باشد). پس داریم:

$$5-2x | -1 \Rightarrow \begin{cases} 5-2x=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \\ 5-2x=-1 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

پس این منحنی از دو نقطه $(2, -1)$ و $(3, 1)$ عبور می‌کند. پس جواب گزینه (۲) است.

$$a | b \Rightarrow \begin{cases} a | -b \\ -a | b \\ -a | -b \end{cases}$$

ویژگی (۵): هر یک از طرفین رابطه عاد کردن را می‌توان در یک منفی ضرب کرد. یعنی:

ویژگی (۶): سمت راست رابطه عاد کردن را در هر عددی می‌توان ضرب کرد (یا به توان هر عدد طبیعی رساند). یعنی:

$$a | b \Rightarrow \begin{cases} a | b^m & (m \in \mathbb{N}) \\ a | mb & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

تذکر عکس رابطه فوق لزوماً برقرار نیست. برای مثال: $4 | 2 \xrightarrow{ما} 4 | 2^3$ ، $4 | 2^3 \xrightarrow{ما} 4 | 4 \times 3$

اثبات ۶:

$$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{به توان } m} b^m = a^m q^m = a \underbrace{(a^{m-1} q^m)}_{q'} \Rightarrow b^m = a q' \Rightarrow a | b^m \\ \xrightarrow{\text{ضرب در } m} mb = maq = a \underbrace{(mq)}_{q'} \Rightarrow mb = a q' \Rightarrow a | mb \end{cases}$$

ویژگی (۷): طرفین رابطه عاد کردن را می‌توان در هر عدد صحیح ضرب کرد یا به هر توانی رساند و بالعکس، یعنی:

$$a | b \Leftrightarrow ma | mb \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$a | b \Leftrightarrow a^n | b^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

اثبات ۷:

$$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow \begin{cases} b^n = a^n \underbrace{q^n}_{q'} \Rightarrow a^n | b^n \\ mb = maq \Rightarrow ma | mb \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} a | b \\ n \leq m \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^n | b^m \quad \text{نتیجه ۱:}$$

$$2 | 6 \xrightarrow{3>2} 2^3 | 6^3 \quad \text{مثال}$$

اثبات نتیجه ۱:

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\text{طرفین به توان } m} b^m = a^m q^m = a^n \cdot \underbrace{a^{m-n} q^m}_{q'} \Rightarrow a^n | b^m$$

$$\left. \begin{matrix} a^n | b^m \\ n \geq m \end{matrix} \right\} \Rightarrow a | b \quad \text{نتیجه ۲:}$$

$$4 | 24 \xrightarrow{3>2} 4^3 | 24^3 = 6^3 \times 4^3 \Rightarrow 4^3 | 6^3 \times 4^3 = 576 \quad \text{مثال}$$

اثبات نتیجه ۲:

$$a^n | b^m \xrightarrow{s=n-m} a^{m+s} | b^m \xrightarrow{b^s \text{ سمت راست ضرب در}} a^{m+s} | b^{m+s} \Rightarrow a | b$$

$$\left. \begin{array}{l} a^n | b^m \\ \frac{m}{n} \leq \frac{q}{p} \text{ یا } mp \leq nq \end{array} \right\} \Rightarrow a^p | b^q \quad \text{نتیجه ۳:}$$

$$\text{مثال: } \underbrace{13^5}_{3^0 \times 3^5} | \underbrace{18^{10}}_{3^{10} \times 2^{10}} \Rightarrow \underbrace{13^3}_{3^6 \times 3^3} | \underbrace{18^7}_{3^7 \times 2^{14}} \quad \left(\frac{1}{5} < \frac{7}{3} \right) \text{ چرا که}$$

اثبات نتیجه ۳:

$$mp \leq nq \Rightarrow 0 \leq nq - mp \xrightarrow{\text{می توان نوشت } t} nq - mp = t \Rightarrow mp = nq - t \quad (t \geq 0)$$

$$\text{طبق فرض: } a^n | b^m \xrightarrow{\text{به توان } p} a^{np} | b^{mp} \xrightarrow{mp=nq-t} a^{np} | b^{nq-t} \xrightarrow{b^t \text{ سمت راست ضرب در}} a^{np} | b^{nq} \Rightarrow a^p | b^q$$

$$\forall m, n, m \geq n \Rightarrow a^n | a^m \quad \text{نتیجه ۴:}$$

اثبات نتیجه ۴:

$$m \geq n \Rightarrow a^m = a^n \times \underbrace{a^{m-n}}_q \Rightarrow a^n | a^m$$

تست

از رابطه $a^5 | b^7$ کدام رابطه را همواره می توان نتیجه گرفت؟

$$a^7 | b^3 \quad (۴)$$

$$a^7 | b \quad (۳)$$

$$a^3 | b^2 \quad (۲)$$

$$a | b \quad (۱)$$

پاسخ: روش اول: طبق نتیجه ۳ در رابطه بالا زمانی می توان از رابطه $a^n | b^m$ ، رابطه $a^p | b^q$ را نتیجه گرفت که $mp \leq nq$ باشد. پس می توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} a^5 | b^7 \\ 5 \times 3 \geq 7 \times 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^3 | b^2$$

پس جواب گزینه (۴) است.

روش دوم:

$$a^5 | b^7 \xrightarrow{\text{طرفین به توان } ۲} a^{10} | b^{14} \xrightarrow{\text{سمت راست را در } b \text{ ضرب می کنیم}} a^{10} | b^{15} \Rightarrow a^3 | b^2$$

پس می توانیم بگوییم $(a^3)^5 | (b^2)^5$ و با توجه به ویژگی ۷ داریم:

تست

کدام نتیجه گیری در حالت کلی نادرست است؟

$$a^2 | b^2 \Rightarrow 2a | b \quad (۴)$$

$$a | b \Rightarrow 2a | 4b \quad (۳)$$

$$a^2 | b^2 \Rightarrow a | 2b \quad (۲)$$

$$a^3 | b^3 \Rightarrow a | 3b \quad (۱)$$

پاسخ: طبق ویژگی های عاد کردن درستی هر گزینه را بررسی می کنیم:

$$a^3 | b^3 \Rightarrow a | b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } ۳} a | 3b \quad \checkmark \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$a^2 | b^2 \Rightarrow a | b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } ۲} a | 2b \quad \checkmark \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$a | b \Rightarrow 2a | 2b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } ۲} 2a | 4b \quad \checkmark \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$a = 3, b = 9 \Rightarrow \underbrace{3^2}_{9} | \underbrace{9^2}_{81} \not\Rightarrow \underbrace{2 \times 3}_{6} | 9$$

گزینه (۴) نادرست است؛ برای رد آن مثال نقض ارائه می کنیم:
پس جواب گزینه (۴) است.

ویژگی (۸): سمت چپ رابطه عاد کردن را می توان با مقسوم علیه آن جایگزین کرد. به عبارت دیگر:

$$ab | c \Rightarrow \begin{cases} a | c \\ b | c \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 | 4 \\ 4 | 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 | 4 \quad \text{مثال: برای مثال:}$$

$$\frac{a}{c} | \frac{b}{d} \Rightarrow ac | bd$$

ویژگی (۹): طرفین رابطه عاد کردن را می توان در هم ضرب کرد. یعنی:

تذکر: این ویژگی در رابطه با جمع، تفریق و تقسیم لزوماً صدق نمی کند.

ویژگی (۱۰) (بسیار مهم): هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن گاه مجموع و تفاضل و حاصل ضرب آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$\left. \begin{array}{l} a | b \\ a | c \end{array} \right\} \Rightarrow a | b+c, a | b-c, a | b \times c$$

و به طور کلی هر ترکیب خطی آن دو عدد را می شمارد.

$$a | mb \pm nc \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

نتیجه: اگر $a | b$ و $a | na$ آن گاه $a | b + na$

تست

از درستی رابطه $xy \mid z$ کدام نتیجه را نمی توان گرفت؟

$$y^2 \mid z \quad (۴)$$

$$x^3 \mid z^4 \quad (۳)$$

$$y \mid z \quad (۲)$$

$$x \mid z - x^4 \quad (۱)$$

پاسخ: به جای سمت چپ رابطه می توانیم مقسوم علیه های آن را قرار دهیم:

$$xy \mid z \Rightarrow \begin{cases} y \mid z & (\text{درستی گزینه } ۲) \\ x \mid z \xrightarrow{۴>۳} x^3 \mid z^4 & (\text{درستی گزینه } ۳) \end{cases}$$

از طرفی هم به کمک رابطه $x \mid z$ و این که هر عددی خودش را می شمارد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x \mid z \\ x \mid x \xrightarrow{\text{سمت راست به توان } ۴} x \mid x^4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم.}} x \mid z - x^4 \quad (\text{درستی گزینه } ۱)$$

برای رد گزینه (۴)، مثال نقض زیر را ارائه می کنیم:

$$\begin{array}{ccc} ۹ \times ۲ \mid ۱۸ & \xrightarrow{\text{اما}} & ۴ \nmid ۱۸ \\ x & y & z \end{array} \quad \begin{array}{c} y^2 \\ y^2 \end{array} \quad (\text{رد گزینه } ۴)$$

پس جواب گزینه (۴) است.

تست

به ازای چند عدد صحیح a ، عدد a دو عدد $4m+3$ و $5m+4$ را عاد می کند؟

$$(۴) \text{ سه}$$

$$(۳) \text{ دو}$$

$$(۲) \text{ یک}$$

$$(۱) \text{ صفر}$$

پاسخ: a دو عدد $4m+3$ و $5m+4$ را می شمارد، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid 4m+3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } ۵} a \mid 20m+15 \\ a \mid 5m+4 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } ۴} a \mid 20m+16 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم.}} a \mid -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس دو مقدار صحیح برای a وجود دارد و جواب گزینه (۳) است.

توجه

در تمام مسائل به این سبک، هدف حذف متغیر از سمت راست رابطه عاد کردن است، به طوری که در سمت راست فقط عدد باقی بماند.

تست

چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به طوری که حاصل کسر $\frac{5n+17}{n-5}$ یک عدد طبیعی باشد؟

$$(۴) \text{ بی شمار}$$

$$(۳) \text{ ۸}$$

$$(۲) \text{ ۷}$$

$$(۱) \text{ ۱۱}$$

پاسخ: برای آن که $\frac{5n+17}{n-5}$ عددی طبیعی باشد، باید:

$$\frac{5n+17}{n-5} > 0 \xrightarrow{5n+17>0} n-5 > 0$$

اولاً: مثبت باشد، یعنی:

ثانیاً: مخرج، صورت کسر را بشمارد، یعنی $5n+17 \mid n-5$. پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} n-5 \mid 5n+17 \\ n-5 \mid n-5 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } ۵} n-5 \mid 5n-25 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم.}} n-5 \mid 42$$

پس از آن جایی که $n-5 > 0$ است، باید $n-5$ مقسوم علیه مثبت ۴۲ باشد، پس داریم:

$n-5$	۱	۲	۳	۶	۷	۱۴	۲۱	۴۲
n	۶	۷	۸	۱۱	۱۲	۱۹	۲۶	۴۷

+۵

پس برای ۸ مقدار طبیعی $\{۶, ۷, ۸, ۱۱, ۱۲, ۱۹, ۲۶, ۴۷\}$ ، حاصل $\frac{5n+17}{n-5}$ عددی طبیعی است؛ پس جواب گزینه (۳) است.

نکته مهم

در حل مسائل به صورت $x-a \mid f(x)$ ، کافی است رابطه $x-a \mid f(a)$ را حل کنیم. (چرا که باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابراست با $f(a)$)

تست

به ازای چند عدد صحیح n ، حاصل $\frac{2n^2+3n+7}{n-1}$ یک عدد صحیح است؟

$$(۴) \text{ ۱۶}$$

$$(۳) \text{ ۱۲}$$

$$(۲) \text{ ۸}$$

$$(۱) \text{ ۶}$$

پاسخ: برای آن که حاصل $\frac{2n^2+3n+7}{n-1}$ عددی صحیح باشد، باید مخرج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $2n^2+3n+7 \mid n-1$. ریشه عبارت سمت چپ را محاسبه کرده و در عبارت سمت راست قرار می دهیم:

$$n-1=0 \Rightarrow n=1 \Rightarrow f(1)=2(1)^2+3(1)+7=12$$

$$\Rightarrow n-1 \mid 12 \Rightarrow n-1 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

در نتیجه به ازای هر یک از این ۱۲ مقدار، عددی صحیح برای n به دست می آید. پس جواب گزینه (۳) است.

تذکر: اگر ریشه عبارت سمت چپ (مقسوم‌علیه) عددی صحیح نشد، باز هم ریشه را در عبارت قرار می‌دهیم و عدد به‌دست آمده را تا حد امکان ساده می‌کنیم. حال عبارت سمت چپ باید صورت این کسر را بشمارد.

تست تعداد جواب‌های طبیعی معادله $3xy - y - 5x = 13$ در اعداد طبیعی را بیابید.

۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

پاسخ: در این جا ابتدا y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم:

$$3xy - y - 5x = 13 \Rightarrow y(3x - 1) = 5x + 13 \Rightarrow y = \frac{5x + 13}{3x - 1}$$

حال برای آن‌که y و x اعدادی طبیعی باشند، باید:

$$\frac{5x + 13}{3x - 1} > 0 \Rightarrow \frac{5x + 13}{3x - 1} > 0 \Rightarrow 3x - 1 > 0$$

اولاً: x و y هر دو مثبت باشند:

ثانیاً: مخرج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $3x - 1 \mid 5x + 13$. حالا ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = 5\left(\frac{1}{3}\right) + 13 = \frac{44}{3} \Rightarrow 3x - 1 \mid 44$$

مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴۴ برابر است با:

$$3x - 1 = \begin{cases} 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{N} & \times \\ 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 9 & \checkmark \\ 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N} & \times \\ 11 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 3 & \checkmark \\ 22 \Rightarrow x = \frac{23}{3} \notin \mathbb{N} & \times \\ 44 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y = 2 & \checkmark \end{cases}$$

پس (۱، ۹)، (۴، ۳) و (۱۵، ۲) جواب‌های طبیعی هستند که برای (x, y) به‌دست می‌آید. پس جواب گزینه (۴) است.

ویژگی (۱۱): اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن‌گاه a ، c را می‌شمارد. یعنی:

$$\left. \begin{matrix} a \mid b \\ b \mid c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \mid c \quad (\text{خاصیت تعدی})$$

اثبات (۱۱):

$$\begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow b = aq \\ b \mid c &\Rightarrow c = bq' \end{aligned} \xrightarrow{b=aq} c = (aq)q' = aqq' \Rightarrow a \mid c$$

تست اگر $a \mid 11$ و $a \mid 780$ ، در این صورت برای a ، چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

پاسخ: با توجه به رابطه تعدی داریم:

$$\begin{cases} 11 \mid a \\ a \mid 780 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} 11 \mid 780$$

اما این رابطه هرگز برقرار نیست، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد که هر دو رابطه برقرار باشد. پس جواب گزینه (۲) است.

تست از درستی رابطه $a - b \mid x^2 - y^2$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

پاسخ: طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \Rightarrow \begin{cases} \text{رابطه ۱: } x - y \mid x^2 - y^2 \\ \text{رابطه ۲: } x + y \mid x^2 - y^2 \end{cases}$$

حالا از رابطه $a - b \mid x^2 - y^2$ (فرض مسئله) و خاصیت تعدی در رابطه عاد کردن داریم:

$$\left. \begin{matrix} \text{رابطه ۱: } x - y \mid x^2 - y^2 \\ \text{فرض مسئله: } x^2 - y^2 \mid a - b \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x - y \mid a - b \quad (\text{گزینه ۴})$$

$$\left. \begin{matrix} \text{رابطه ۲: } x + y \mid x^2 - y^2 \\ \text{فرض مسئله: } x^2 - y^2 \mid a - b \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x + y \mid a - b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } (a^2 + ab + b^2)} x + y \mid a^3 - b^3 \quad (\text{گزینه ۱})$$

حالا به کمک رابطه گزینه (۴) داریم:

$$x - y \mid a - b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } (a + b)} x - y \mid a^2 - b^2 \quad (\text{گزینه ۳})$$

$$\Delta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} \mid \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \Delta \xrightarrow{\text{اما}} \Delta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} \mid \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 217$$

اما برای رد گزینه (۲) داریم:

پس جواب گزینه (۲) است.

ویژگی (۱۲): اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ باشد، در این صورت $|a| \leq |b|$ (توجه داریم که $b \neq 0$ است چرا که اگر $b = 0$ باشد، همواره $a \mid b$)

نتیجه اگر $a \mid b$ و $b \mid a$ آن گاه $|a| = |b|$

تذکر در بخش پذیری لزوماً ویژگی تقارنی وجود ندارد. برای مثال $4 \mid 2$ ولی $2 \nmid 4$

تست به ازای چند عدد طبیعی n ، رابطه $n^2 + 1 \mid 4n - 2$ برقرار است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: طبق ویژگی شماره (۱۲) داریم:

$$n^2 + 1 \mid 4n - 2 \Rightarrow n^2 + 1 \leq 4n - 2 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 \leq 0 \Rightarrow (n-1)(n-3) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq n \leq 3$$

با جایگذاری ۱، ۲ و ۳ در رابطه اصلی مقادیر $n = 1$ و $n = 3$ قابل قبول می باشند و جواب گزینه (۳) است.

چون عبارت‌ها برای n های طبیعی، مثبت‌اند از قدرمطلق استفاده نمی‌کنیم.

اعداد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول را با P نمایش می‌دهیم:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

تذکر عددی که اول نباشد را مرکب می‌گوییم.

تذکر عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

نکته اگر p عددی اول باشد و $a \mid p$ آن گاه $a = 1$ یا $a = p$

تست اگر عدد طبیعی a دو عدد $4k + 5$ و $3k + 7$ را عاد کند، آن گاه a کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴) ۱۳

پاسخ: عدد طبیعی a هر دو عدد $4k + 5$ و $3k + 7$ را می‌شمارد. پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid 3k + 7 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} a \mid 15k + 35 \\ a \mid 4k + 5 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۷}} a \mid 28k + 35 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} a \mid 13$$

چون ۱۳ عددی اول است و a عددی طبیعی پس $a = 1$ یا $a = 13$ و در نتیجه جواب گزینه (۴) است.

نکته اگر تجزیهٔ عدد طبیعی n به عوامل اول به صورت $n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ باشد، آن گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

نتیجه تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح n برابر است با: $2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$

تست تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۷۰۰ کدام است؟

(۱) ۳۶ (۲) ۲۷ (۳) ۵۴ (۴) ۶۳

پاسخ: تجزیهٔ ۲۷۰۰ برابر $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ می‌باشد، پس:

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } 2700 = (2+1)(3+1)(2+1) = 36$$

و جواب گزینه (۱) است.

بخش‌پذیری و اتحادها

در بخش‌پذیری عبارات جبری، اتحادها نقش زیادی دارند. دو تا از آن‌ها را که کاربردهای بیش‌تری دارند، یادآوری می‌کنیم:

آ) اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \Rightarrow \begin{cases} a-b \mid a^2 - b^2 \\ a+b \mid a^2 - b^2 \end{cases}$$

ب) اتحاد چاق و لاغر

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \Rightarrow a-b \mid a^3 - b^3$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \Rightarrow a+b \mid a^3 + b^3$$

تست کدام نتیجه‌گیری لزوماً برقرار نیست؟

(۱) $c \mid a - b \Rightarrow c^2 \mid (a^2 - b^2)^2$
 (۲) $c \mid a + b \Rightarrow c \mid a^3 + b^3$
 (۳) $c \mid a + b \Rightarrow c \mid a^2 - b^2$
 (۴) $c \mid a + b \Rightarrow c \mid a^3 - b^3$

پاسخ: درستی هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

به توان ۲ می‌رسانیم. $\xrightarrow{\text{تعدی}} c \mid a^2 - b^2 \xrightarrow{\text{تعدی}} c^2 \mid (a^2 - b^2)^2$ ✓

گزینه (۱): $\left. \begin{array}{l} c \mid a - b \\ a - b \mid a^2 - b^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c \mid a^2 - b^2$

$$\left. \begin{array}{l} c | a + b \\ a + b | a^3 + b^3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c | a^3 + b^3 \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} c | a + b \\ a + b | a^3 - b^3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c | a^3 - b^3$$

برای رد گزینه (۴) فرض کنیم $c = 4$ ، $b = 3$ و $a = 5$ باشد:

$$4 | \underbrace{5+3}_8 \xrightarrow{\text{اما}} 4 \nmid \underbrace{5^3-3^3}_{98}$$

پس جواب گزینه (۴) است.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

در کتاب حسابان تعمیم‌های اتحاد چاق و لاغر آمده است:
(آ) برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a - b | a^n - b^n$$

نتیجه اگر $\frac{n}{m}$ عددی طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$a^m - b^m | a^n - b^n$$

تست عدد $3^{21} - 3^{14}$ بر کدام عدد بخش پذیر است؟

(۴) ۲۵

(۳) ۲۱

(۲) ۱۷

(۱) ۲۳

پاسخ: ابتدا توان‌های اعداد داده شده را یکسان می‌کنیم.

$$3^{21} - 3^{14} = (3^3)^7 - (3^2)^7 = 27^7 - 4^7 \Rightarrow \underbrace{27-4}_{23} | 27^7 - 4^7$$

پس $3^{21} - 3^{14} | 23$ و جواب گزینه (۱) است.

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1})$$

(ب) اگر n عددی زوج باشد آن‌گاه:

$$n = 2k, a + b | a^n - b^n$$

نتیجه اگر $\frac{n}{m}$ عددی زوج باشد آن‌گاه:

$$a^m + b^m | a^n - b^n$$

تست عدد $3^{36} - 3^{36}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر نیست؟

(۴) ۱۹

(۳) ۶۵

(۲) ۳۵

(۱) ۴۲

پاسخ: با توجه به نتایج تعمیم اتحادهای چاق و لاغر داریم:

$$\frac{3^6}{3} = 12 \xrightarrow{12 \text{ زوج است.}} \begin{cases} 3^3 - 2^3 | (3^3)^{12} - (2^3)^{12} \Rightarrow 19 | 3^{36} - 2^{36} \\ 3^3 + 2^3 | (3^3)^{12} - (2^3)^{12} \Rightarrow 35 | 3^{36} - 2^{36} \end{cases}$$

$$\frac{3^6}{4} = 9 \xrightarrow{9 \text{ فرد است.}} 3^4 - 2^4 | (3^4)^9 - (2^4)^9 \Rightarrow 65 | 3^{36} - 2^{36}$$

پس جواب گزینه (۱) است.

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

(پ) اگر n عددی فرد باشد آن‌گاه:

$$n = 2k + 1; a + b | a^n + b^n$$

نتیجه عددی فرد باشد، آن‌گاه:

$$a^m + b^m | a^n + b^n$$

تست به ازای چند عدد n کوچک‌تر از ۵۰، رابطه $5^n + 1 | 126$ برقرار است؟

(۴) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۴

پاسخ: با توجه به این‌که $5^3 + 1 = 126$ است برای آن‌که رابطه $5^n + 1 | 126$ درست باشد، باید $\frac{n}{3}$ عددی فرد باشد. پس می‌توان نوشت:

$$5^3 + 1 | 5^n + 1 \Rightarrow \frac{n}{3} = \underbrace{2k+1}_{\text{فرد}} \Rightarrow n = 6k + 3 \Rightarrow 1 \leq 6k + 3 \leq 50 \Rightarrow 0 \leq k \leq 7$$

به ازای هر مقدار صحیح k ، یک مقدار برای n به دست می‌آید یعنی ۸ مقدار صحیح کوچک‌تر از ۵۰ داریم که $5^n + 1 | 126$. پس جواب گزینه (۴) است.

۲۴. در اثبات نامساوی $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy - xz + yz$ به کدام عبارت بدیهی زیر می‌رسیم؟

$$\begin{aligned} (x+y-z)^2 &\geq 0 \quad (1) & (x-y)^2 + (x+z)^2 + (z-y)^2 &\geq 0 \quad (1) \\ (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y+z)^2 &\geq 0 \quad (4) & (x+y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 &\geq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

قسمت دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۲۵☆. به ازای چند عدد طبیعی n داریم $2n+2 \mid 4$ ؟

$$\begin{aligned} 4 \quad (1) & & 3 \quad (2) & & 2 \quad (3) & & 1 \quad (4) \end{aligned}$$

۲۶☆. اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آنگاه بزرگ‌ترین عدد طبیعی که $a^5 + a^4 - a^3 - a^2$ را می‌شمارد، کدام است؟

$$\begin{aligned} 3 \quad (1) & & 4 \quad (2) & & 12 \quad (3) & & 24 \quad (4) \end{aligned}$$

۲۷☆. اگر $x \mid y^2$ و $y^3 \mid z^2$ ، کدام گزینه در حالت کلی نادرست است؟

$$\begin{aligned} x^2 \mid yz^2 \quad (1) & & x \mid z^2 \quad (2) & & x^3 \mid z^4 \quad (3) & & x^4 \mid y^3z^3 \quad (4) \end{aligned}$$

۲۸☆. اگر $a+3b \mid 5$ ، در این صورت عبارت $ab+3a^2+9b^2$ بر کدام گزینه بخش‌پذیر است؟

$$\begin{aligned} 15 \quad (1) & & 20 \quad (2) & & 25 \quad (3) & & 30 \quad (4) \end{aligned}$$

۲۹☆. به ازای چند عدد طبیعی n داریم $2n^3 - 3n^2 - 2n \mid 20$ ؟

$$\begin{aligned} 3 \quad (1) & & 2 \quad (2) & & 1 \quad (3) & & \text{صفر} \quad (4) \end{aligned}$$

۳۰. به ازای کدام مقادیر n ، رابطه $2n^3 - n - 1 \mid 0$ برقرار است؟

$$\begin{aligned} \{1\} \quad (1) & & \{0,1\} \quad (2) & & \{1, \pm \frac{1}{2}\} \quad (3) & & \mathbb{Z} \quad (4) \end{aligned}$$

۳۱☆. به ازای چند عدد صحیح n داریم $2n^2 + n - 2 \mid 1$ ؟

$$\begin{aligned} 1 \quad (1) & & 2 \quad (2) & & 3 \quad (3) & & 4 \quad (4) \end{aligned}$$

۳۲☆. اگر $a-b \mid a$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} a \mid a-b \quad (1) & & b \mid a-b \quad (2) & & a \mid b \quad (3) & & a-b \mid b \quad (4) \end{aligned}$$

۳۳☆. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی a رابطه $3a-3 \mid 17$ برقرار است؟

$$\begin{aligned} 5 \quad (1) & & 6 \quad (2) & & 7 \quad (3) & & 8 \quad (4) \end{aligned}$$

۳۴☆. تعداد اعداد صحیح و مثبت که هر دو عدد $2-8a^2+3a$ و $2+3a$ را بشمارد، کدام است؟

$$\begin{aligned} 1 \quad (1) & & 2 \quad (2) & & 4 \quad (3) & & 8 \quad (4) \end{aligned}$$

۳۵. کدام گزینه درست است؟

$$\begin{aligned} a+b \mid (a+b)^2 - 2ab \quad (1) & & a+b \mid (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \quad (2) \\ a+b \mid (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 \quad (3) & & a+b \mid (a-b)^2 + 2ab \quad (4) \end{aligned}$$

۳۶. اگر a و b اعداد صحیح فرد باشند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$\begin{aligned} 8 \mid a^2 + b^4 \quad (1) & & 6 \mid a^2 + b^2 + 4 \quad (2) & & 4 \mid a^4 - b^2 \quad (3) & & 8 \mid a^2b^2 \quad (4) \end{aligned}$$

۳۷☆. اگر $a^3 \mid b^2$ حداکثر مقدار طبیعی n که $a^{7n-3} \mid b^{4n+3}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 5 \quad (1) & & 6 \quad (2) & & 7 \quad (3) & & 8 \quad (4) \end{aligned}$$

۳۸☆. کدام گزینه همواره صحیح نیست؟

$$\begin{aligned} a-b \mid a \Rightarrow a-b \mid b^2 \quad (1) & & ab^2 \mid c \Rightarrow a \mid c, b \mid c \quad (2) \\ a^2 \mid b \Rightarrow a^3 \mid b^5 \quad (3) & & a \mid bc \Rightarrow a \mid b, a \mid c \quad (4) \end{aligned}$$

- ۳۹☆. برای چند عدد طبیعی n رابطه $2n+1 \mid 2n^2 - 3n + 3$ برقرار است؟
 (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱
- ۴۰☆. چند نقطه با مختصات صحیح و طول طبیعی در معادله $3x^2 - 2xy + 3y - 8x + 3 = 0$ صدق می‌کنند؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
۴۱. اگر رابطه $n^2 \mid \binom{n}{2}$ برقرار باشد، بیش‌ترین مقدار $\binom{n}{2} - 2n^2$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۵
- ۴۲☆. اگر $a > 1$ و $a \mid 5k+1$ و $a \mid 4k+3$ ، در این صورت a بر چند عدد اول بخش‌پذیر است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
۴۳. اگر p یک عدد اول و $30! + p \mid p$ برای p چند مقدار متمایز وجود دارد؟
 (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲
- ۴۴☆. عدد $A = 18^x \times 12^{x+1}$ دارای ۷۲ مقسوم‌علیه مثبت است. x کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲
- ۴۵☆. تفاضل تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد طبیعی $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ و $\frac{N}{36}$ مساوی ۱۴ است. کم‌ترین مقدار N کدام است؟ (سراسری ریاضی)
 (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۱۶ (۳) ۲۸۸ (۴) ۴۳۲

اتحادها و عاد کردن

- ۴۶☆. اگر $a - c \mid b + c$ و $a^3 - c^3 \mid b + c$ آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟
 (۱) $c \mid b$ (۲) $c \mid a$ (۳) $b \mid c$ (۴) $a \mid c$
۴۷. اگر روابط $(x-2)^2 \mid (x-2)^2 - b^2$ و $a^2 \mid (x-3)(x-1) \mid a^3 + b^3$ برقرار باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟
 (۱) ± 4 (۲) ± 3 (۳) ± 2 (۴) ± 1
- ۴۸☆. تعداد عضوهای مجموعه $\{n : 65 \mid 2^n + 1\}$ در مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۴۹☆. عدد $2^{31} - 3^{35}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷
- ۵۰☆. عدد $5^{69} + 3^{92}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟
 (۱) ۱۹۸ (۲) ۲۰۶ (۳) ۸ (۴) ۴۴
۵۱. $7^{200} - 1$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۲۱ (۴) ۱۸

قسمت سوم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) -

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

ب.م.م

- ۵۲☆. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک سه عدد ۹۰۰، ۱۶۸۰ و ۱۲۶۰ کدام است؟
 (۱) ۹۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۶۰
- ۵۳☆. ب.م.م دو عبارت $9n + 2$ و $11n - 5$ کدام است؟
 (۱) ۶۷ یا ۱ (۲) ۶۷ یا ۳ (۳) ۴۵ یا ۱ (۴) ۴۵ یا ۳
- ۵۴☆. به ازای چند عدد طبیعی n ، هر دو عدد $7n + 5$ و $11n + 2$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟
 (۱) هیچ عدد (۲) یک عدد (۳) دو عدد (۴) بی‌شمار عدد
- (مشابه سراسری فارغ از کشور ۹۶)
- (سراسری فارغ از کشور ۹۱)

۵۵. برای عدد صحیح a ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $a - 2$ و $a - 4 - 5a^2 - 4a^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ یا ۲ (۲) ۱ یا ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۶☆. اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $n^2 + 9n + 21$ و $n + 7$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱ و ۳ (۳) ۱ و ۵ (۴) ۷

اعداد متباین

۵۷☆. اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $12n + 7$ و $5n - 2$ نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو

عدد، کدام است؟

- (۱) ۵۹ (۲) ۶۷ (۳) ۸۳ (۴) ۸۹

(سراسری ۸۹)

۵۸☆. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، اعداد $25n + 9$ و $11n + 4$ نسبت به هم اولند؟

- (۱) ۸۶ (۲) ۸۷ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

(سراسری خارج از کشور ۹۹)

۵۹☆. در مجموعه اعداد طبیعی اگر $d = (2n^2 - 2n + 6, 3n + 5)$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۷ (۴) ۵۳

(سراسری خارج از کشور ۸۷)

۶۰. به ازای اعداد طبیعی $1 \leq n \leq 50$ در چند حالت دو عدد $4n + 7$ و $5n + 9$ نسبت به هم اولند؟

- (۱) ۴۷ (۲) ۴۸ (۳) ۴۹ (۴) ۵۰

۶۱☆. به ازای هر عدد طبیعی $n \leq m$ دو عدد $7n - 4$ و $n + 9$ نسبت به هم اولند. بیش‌ترین مقدار m کدام است؟

- (۱) ۵۷ (۲) ۵۸ (۳) ۶۶ (۴) ۶۷

(سراسری خارج از کشور ۸۵)

۶۲. به ازای هر عدد طبیعی $n \leq n_0$ ، دو عدد $2n + 7$ و $11n - 3$ نسبت به هم اولند. بیش‌ترین مقدار n_0 کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۳۷ (۳) ۳۹ (۴) ۴۰

(سراسری ۸۵)

۶۳☆. اگر n عدد طبیعی و دو عدد $9n - 5$ و $n + 4$ دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر ۱ باشند، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(برگرفته از کتاب درسی)

۶۴. چه تعداد از عبارتهای زیر نادرست است؟

- (آ) $(2a + 1, 2a + 3) = 1$ (ب) $(a + 4, a + 5) = 1$
(پ) $(3a + 2, 3a + 4) = 1$ (ت) $(4a + 2, 4a + 4) = 2$

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۵. اگر a عددی تک‌رقمی و طبیعی و $(a, 18) = 1$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

ویژگی‌های ب.م.م

۶۶☆. اگر دو عدد a و 90 نسبت به هم اول باشند، بزرگ‌ترین عددی که همواره $A = a^4 - 1$ را می‌شمارد، کدام است؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۲۸۸ (۳) ۳۲۴ (۴) ۴۸۰

۶۷☆. اگر $4^n - 16^n$ بر 1023 بخش‌پذیر باشد، کم‌ترین مقدار n کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۸☆. اگر اعداد صحیح a و b چنان باشند که $(a^2, b^2) + (6a, 6b) = 280$ ، آنگاه (a, b) کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۴

۶۹. اگر $(a^5, 243b^5) = (a^5, 54b^2)$ باشد، آنگاه $(a, 3b)$ کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۶ (۴) ۳

۷۰☆. اگر $(a^2, b^2) = (-a, b) + 12$ باشد، آنگاه $(3a^2, 3b^2)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۷ (۳) ۴۸ (۴) ۷۲

۷۱. اگر $a^2 - 4 \mid (a, b)$ ، آنگاه $a - b$ کدام می‌تواند باشد؟ $((a, b) \neq 1)$

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۲۵ (۴) ۳۳

کم‌م و ویژگی‌های آن

۷۲☆. اگر $a = 2^3 \times 5^2 \times 7$ باشد، چند عدد چهار رقمی داریم که $[a, b] = 2^4 \times 5^2 \times 7^2$ ؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

معادله سیاله

☆ ۲۳۰. به ازای کدام مقدار n معادله سیاله $60x + 84y = 5n - 1$ دارای جواب است؟

- (۲) ۲۹ (۳) ۳۳ (۴) ۳۵

☆ ۲۳۱. معادله $8x + 12y = a$ به ازای کدام مقدار a در مجموعه $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

☆ ۲۳۲. به ازای کدام عدد طبیعی n ، معادله خطی $24x + 39y = 2n + 1$ در مجموعه $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۳ (۳) ۳۷ (۴) ۴۱

☆ ۲۳۳. اگر معادله سیاله $ax + 6y = 1$ فاقد جواب باشد، کدام معادله زیر قطعاً جواب دارد؟

- (۱) $(a+1)x + 6y = 1$ (۲) $(2a+1)x + 6y = 1$ (۳) $(3a+1)x + 6y = 1$ (۴) $(6a+1)x + 6y = 1$

☆ ۲۳۴. معادله $(9n+7)x + (5n+k)y = 1$ به ازای تمام مقادیر طبیعی n ، در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است. k کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

حل معادله سیاله

☆ ۲۳۵. معادله سیاله خطی $15x + 14y = 1050$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

☆ ۲۳۶. معادله سیاله خطی $7x + 5y = 130$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

☆ ۲۳۷. معادله سیاله $11x + 23y = 90$ چند جواب صحیح با شرط $|y| < 50$ دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

☆ ۲۳۸. معادله سیاله $7x + 21y = 28$ چند جواب صحیح در بازه $(-20, 20)$ دارد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۱ (۴) ۹

☆ ۲۳۹. اعداد صحیح a و b در معادله $15a + 23b = 12$ صدق می کند. باقی مانده تقسیم عدد b بر ۱۵ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

☆ ۲۴۰. مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی سده رقمی x که در معادله $57x - 87y = 342$ صدق کند، کدام است؟ (سراسری ۸۹)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

☆ ۲۴۱. معادله سیاله $9x + 13y = 725$ در مجموعه اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟ (سراسری خارج از کشور ۹۸)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

☆ ۲۴۲. معادله $4x - 5y = 8$ چند دسته جواب طبیعی دارد، که مجموع هر دسته جواب از ۳۰ بیش تر نباشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) صفر

☆ ۲۴۳. اگر $221x + 357y = (221, 357)$ باشد، تعداد اعداد طبیعی دو رقمی x کدام است؟ (سراسری ۹۵)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

☆ ۲۴۴. اگر $357x + 629y = (357, 629)$ ، آنگاه کوچک ترین عدد مثبت $x + y$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

☆ ۲۴۵. معادله سیاله $25x + 12y = 1110$ بر روی مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ چند زوج جواب دارد؟ (سراسری خارج از کشور ۸۷)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

☆ ۲۴۶. برای خرید کتاب به قیمت ۷۵۰۰ تومان به تعداد A بن دویست تومانی و B بن یکصد و پنجاه تومانی پرداخت نموده ایم. حداقل $A + B$

کدام است؟ (سراسری ۸۴)

- (۱) ۳۵ (۲) ۳۶ (۳) ۳۷ (۴) ۳۸

☆ ۲۴۷. قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می توان از این دو نوع کالا،

خریداری کرد؟ (سراسری ۹۸)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

☆ ۲۴۸. به چند طریق می توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟ (سراسری ۹۱)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

☆ ۲۴۹. کم ترین تعداد تمبر لازم برای بسته ای که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد با تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۲۸ ۴ ۳ ۲ ۱

از آن جایی که $a + 3b \mid 5$ پس داریم:

$$\begin{aligned} a + 3b = 5q &\xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + 9b^2 + 6ab = 25q^2 \\ \xrightarrow{+25ab} a^2 + 9b^2 + 6ab + 25ab &= 25q^2 + 25ab \\ \Rightarrow a^2 + 31ab + 9b^2 &= 25(q^2 + ab) \end{aligned}$$

پس $a^2 + 9b^2 + 31ab$ مضرب ۲۵ است.

۲۹ ۴ ۳ ۲ ۱

نکته: اگر $f(n) \mid f(n)$ آن گاه:

$$0 \mid 2n^2 - 3n^2 - 2n \Rightarrow 2n^2 - 3n^2 - 2n = 0 \Rightarrow n(2n^2 - 3n - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0 \notin \mathbb{N} \times \\ 2n^2 - 3n - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} \begin{cases} n = \frac{3+5}{4} = 2 \in \mathbb{N} \checkmark \\ n = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \times \end{cases} \end{cases}$$

پس فقط یک عدد طبیعی برای n داریم.

۳۰ ۴ ۳ ۲ ۱

نکته: هر عددی صفر را می شمارد:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a \mid 0$$

می دانیم برای هر مقدار صحیح a رابطه $a \mid 0$ برقرار است. پس n هر مقدار صحیحی می تواند باشد.

۳۱ ۴ ۳ ۲ ۱

نکته: اگر $a \mid 1$ آن گاه $a = \pm 1$

می دانیم اگر $f(n) \mid f(n)$ آن گاه $f(n) = \pm 1$ است. پس داریم:

$$2n^2 + n - 2 \mid 1 \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 + n - 2 = 1 \Rightarrow 2n^2 + n - 3 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \checkmark \\ n = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \times \end{cases} \\ 2n^2 + n - 2 = -1 \Rightarrow 2n^2 + n - 1 = 0 \\ \Rightarrow (2n-1)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \checkmark \\ n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \times \end{cases} \end{cases}$$

پس دو مقدار صحیح برای n داریم.

۳۲ ۴ ۳ ۲ ۱

نکته: اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ ، آن گاه برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$

داریم $a \mid mb + nc$ (هر ترکیب خطی b و c را عاد می کند).

و به طور ویژه $a \mid b + c$ و $a \mid b - c$

نکته: هر عدد صحیح خودش را عاد می کند، به عبارت دیگر برای هر عدد صحیح a داریم $a \mid a$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a-b \mid a-b \\ a-b \mid a \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}} a-b \mid (a-b) - a \\ a-b \mid -b \Rightarrow a-b \mid b \end{aligned}$$

(برای رد سایر گزینه ها، $a = 3$ و $b = 2$ را در نظر بگیرید)

۲۵ ۴ ۳ ۲ ۱

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح و ناصفر b بخش پذیر گوئیم، هرگاه عددی صحیح مانند q چنان یافت شود که $a = bq$
 * می توانیم بنویسیم $b \mid a$ و بخوانیم a ، b را عاد می کند.
 * a مضرب b است (b مقسوم علیه a است).

برای آن که $4 \mid 2n+2$ ، باید $2n+2$ مقسوم علیه ۴ باشد، یعنی:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2n+2 & -1 & 1 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ \hline 2n & -3 & -1 & -4 & 0 & -6 & 2 \\ \hline \div 2 & n & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 0 & -3 \end{array}$$

یک مقدار طبیعی برای n وجود دارد.

۲۶ ۴ ۳ ۲ ۱

نکته: ۱- حاصل ضرب هر دو عدد متوالی مضرب ۲ است.

۲- حاصل ضرب هر سه عدد متوالی مضرب ۶ است.

۳- حاصل ضرب هر n عدد متوالی مضرب $n!$ است.

با تجزیه عبارت داده شده در سؤال داریم:

$$\begin{aligned} a^5 + a^4 - a^3 - a^2 &= a^4(a+1) - a^2(a+1) = (a+1)(a^4 - a^2) \\ &= (a+1)a^2(a^2 - 1) \\ &= (a+1)a^2(a+1)(a-1) \end{aligned}$$

اما عبارت داده شده را می توان به صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$a(a+1) \times (a-1)a(a+1)$$

حاصل ضرب دو عدد متوالی مضرب ۲ است. حاصل ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است.

در نتیجه عبارت داده شده مضرب ۱۲ است.

۲۷ ۴ ۳ ۲ ۱

نکته: برخی ویژگی های مهم عاد کردن:

$$\begin{aligned} ۱) a \mid b &\Rightarrow \begin{cases} a \mid b^m \\ a \mid mb \end{cases} \\ ۲) a \mid b &\Leftrightarrow a^n \mid b^n \\ ۳) \forall n \geq m &\Rightarrow a^m \mid a^n \\ ۴) \left. \begin{aligned} a \mid b \\ b \mid c \end{aligned} \right\} &\Rightarrow a \mid c \quad (\text{خاصیت تعدی}) \end{aligned}$$

به کمک ویژگی تعدی در رابطه عاد کردن به بررسی گزینه ها می پردازیم:

$$\left. \begin{aligned} x \mid y^2 &\xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 \mid y^4 \\ y^3 \mid z^2 &\xrightarrow{\text{توان } 2} y^6 \mid z^4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x^2 \mid yz^2 \quad (۱) \text{ درستی گزینه } ۱$$

$$\left. \begin{aligned} x \mid y^2 &\xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } y} x \mid y^3 \\ y^3 \mid z^2 &\end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x \mid z^2 \quad (۲) \text{ درستی گزینه } ۲$$

$$\left. \begin{aligned} x \mid y^2 &\xrightarrow{\text{توان } 3} x^3 \mid y^6 \\ y^3 \mid z^2 &\xrightarrow{\text{توان } 2} y^6 \mid z^4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x^3 \mid z^4 \quad (۳) \text{ درستی گزینه } ۳$$

پس گزینه (۴) نادرست است.

$$x = ۱۶, y = ۴, z = ۸$$

مثال نقض گزینه ها:

(نهایی- فرداد ۸۷)

(د) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

(نهایی- دی ۹۰)

(ذ) اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطه $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ را ثابت کنید.

(ر) اگر a و b اعداد حقیقی و مثبت باشند، نامساوی $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ را اثبات کنید.

(ز) با فرض این که a و b دو عدد حقیقی غیرصفر و هم علامت هستند، حکم $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ را اثبات کنید.

(س) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، حکم $a^5 + b^5 > a^4b + b^4a$ را ثابت کنید.

قسمت دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

۲۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(آ) اعداد و هر عددی را می شمارند.

(ب) اگر عددی ۱ یا -۱ را بشمارد آن گاه آن عدد برابر است.

(پ) اگر $a \mid a \cdot n$ آن گاه است.

(ت) برای n های ، رابطه $a^n - b^n \mid a + b$ برقرار است.

(ث) اگر p عددی اول باشد و $a \mid p$ آن گاه یا

۲۲. درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

(آ) فقط به ازای اعداد مثبت $n^3 + 1 \mid n$

(ب) تنها عددی که دقیقاً دو مقسوم علیه دارد ۱ می باشد.

(پ) اگر $a + b \mid 2$ آن گاه $a - b \mid 2$

(ت) اگر $a + b \mid a$ آن گاه $a + b \mid b$

۲۳. ثابت کنید اگر $a \mid b$ آن گاه $a \mid -b$ ، $-a \mid b$ ، $a \mid -b$

۲۴. ثابت کنید اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن گاه عدد a عدد c را می شمارد.

۲۵. موارد زیر را ثابت کنید.

(آ) $\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$

(ب) $(k \neq 0), (k \in \mathbb{Z}), a \mid b \Leftrightarrow ka \mid kb$

۲۶. موارد زیر را اثبات کنید.

(آ) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

(ب) $(b \neq 0), a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

(پ) $a \mid b, b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

۲۷. ثابت کنید هرگاه عددی، دو عدد را بشمارد، آن گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد.

۲۸. موارد زیر را ثابت کنید.

(آ) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

(ب) $a \mid b, c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

(پ) $a \mid b, a \mid c \Rightarrow a \mid mb \pm nc$

۲۹. موارد زیر را در صورت امکان اثبات کنید و یا با ارائه مثال نقض آن ها را رد کنید.

(آ) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند.

(ب) $a \mid b, c \mid d \Rightarrow a + c \mid b + d$

(پ) $(a \neq b), a, b \in P \Rightarrow (a, b) = 1$

(ت) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.

(ث) $(m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}) m \leq n, a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$

۳۰. اگر a عددی صحیح و مخالف صفر و اعداد $6n+5$ و $11n+9$ بر a بخش پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$ است.
۳۱. اگر $a > 1$ و $a \mid 3k+5$ و $a \mid 7k+8$ ثابت کنید a عددی اول است.
۳۲. عدد طبیعی a ، دو عدد $11n+12$ و $3n^2+3n+2$ را می شمارد. مقدار a را به دست آورید.
۳۳. اگر $a \mid 3$ و $c \mid b+7$ باقی مانده تقسیم $ab-17$ بر c چقدر است؟
۳۴. اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $23 \mid 3a-8b$ آنگاه $23 \mid 11a+9b$ را ثابت کنید.
۳۵. اگر $4 \mid 3k+9$ به طوری که k عددی صحیح باشد، $20-3k-9k^2 \mid 81$ را ثابت کنید.
۳۶. به ازای چند عدد طبیعی n ، رابطه $8n+9 \mid n+3$ برقرار است؟

----- قسمت سوم: بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) - کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م) -----

۳۷. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
- (آ) ب.م.م دو عدد ۴۸ و ۸۴ برابر است.
- (ب) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ آنگاه ب.م.م p و a برابر است.
- (پ) ک.م.م دو عدد ۱۸ و ۳۲ برابر است.
- (ت) اگر a و b نسبت به هم اول باشند، در این صورت ک.م.م آن ها برابر است.
۳۸. درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را مشخص کنید.
- (آ) اگر $a \mid b$ آنگاه $(a \cdot b) = a$ و $[a, b] = b$
- (ب) اگر a عددی زوج باشد $(2, a+a) = 2$
- (پ) اگر a عددی فرد باشد $(1, a-1) = a^2$
۳۹. اگر a و b دو عدد صحیح و $(6a, 6b) = 280$ باشد، آنگاه حاصل (a, b) را به دست آورید.
۴۰. اگر a و b اعداد مثبت باشند، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و $ab+1$ را به دست آورید.
۴۱. اگر $d = (3+2a, 4+5a)$ آنگاه مقادیر ممکن برای d را به دست آورید.
۴۲. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، اعداد $9+5n$ و $4+11n$ نسبت به هم اول اند؟
۴۳. اگر $d = (4-6a, 8a)$ آنگاه d دارای چند مقدار متمایز است؟
۴۴. اگر a عددی صحیح و p عددی اول و $p \nmid a$ ثابت کنید $(p, a) = 1$
۴۵. با استفاده از تعاریف ب.م.م و ک.م.م موارد زیر را ثابت کنید.
- (آ) $a \mid b \Rightarrow (a, b) = a$
- (ب) $a \mid b \Rightarrow [a, b] = b$
۴۶. اگر $a \mid b$ آنگاه حاصل عبارت $(a^2, b^2), ([a, b^2], (a^2, b^2))$ را به دست آورید.
۴۷. حاصل عبارت $(a, a^2), (a, b)$ را به دست آورید.
۴۸. حاصل عبارت $(a, [a, b]) - (a, (a, b))$ را به دست آورید.
۴۹. حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید. $(a, b \in \mathbb{Z})$
- (آ) $(3+4a, 2+4a)$
- (ب) (a^6, a^9, a^5)
- (پ) $(3b, 20b^7)$
- (ت) $(b^3, [b, b^7])$

۲۳

$$\begin{aligned} a \mid b &\xrightarrow{a \mid mb} a \mid (-1) \times b \Rightarrow a \mid -b \\ -a \mid a, a \mid b &\xrightarrow{\text{تعدی}} -a \mid b \\ a \mid b &\Rightarrow (-1) \times a \mid (-1) \times b \Rightarrow -a \mid -b \end{aligned}$$

۲۴

$$\begin{aligned} a \mid b \wedge b \mid c &\Rightarrow a \mid c \quad \text{اثبات رابطهٔ مقابل به صورت زیر است:} \\ a \mid b &\Rightarrow b = aq \quad (۱) \\ b \mid c &\Rightarrow c = bq' \quad (۲) \\ \xrightarrow{(۲) \cdot (۱)} c &= aqq' \xrightarrow{qq'=q''} c = aq'' \Rightarrow a \mid c \end{aligned}$$

۲۵

$$\begin{aligned} a^n &= a^m \times a^{n-m} \Rightarrow a^n = a^m \times q \\ \Rightarrow a^m \mid a^n \quad (m, n \in \mathbb{N}, m \leq n) \end{aligned} \quad (آ)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times k} kb = kaq \Rightarrow ka \mid kb \\ ka \mid kb &\Rightarrow kb = kaq \xrightarrow{\div k} b = aq \Rightarrow a \mid b \end{aligned} \right. \quad (ب) \quad (k \neq 0, k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

۲۶

$$\left. \begin{aligned} a \mid b \\ b \mid b^n \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a \mid b^n \quad (آ)$$

$$\begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow a = bq, b \neq 0 \Rightarrow q \neq 0 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z} - \{0\}} 1 \leq |q| \quad (ب) \\ \text{طرفین را در } |a| \text{ ضرب می‌کنیم.} &\xrightarrow{} |a| \times 1 \leq |a| |q| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |a| &\leq |aq| \xrightarrow{b=aq} |a| \leq |b| \\ \left. \begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow |a| \leq |b| \\ b \mid a &\Rightarrow |b| \leq |a| \end{aligned} \right\} &\Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b \quad (پ) \end{aligned}$$

۲۷

$$\begin{aligned} a \mid b \wedge a \mid c &\Rightarrow a \mid b \pm c \\ \text{اثبات رابطهٔ فوق به صورت زیر است:} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow b = a \times q \\ a \mid c &\Rightarrow c = a \times q' \end{aligned} \right\} &\Rightarrow b \pm c = a(\underbrace{q \pm q'}_{q''}) \\ \Rightarrow b \pm c &= aq'' \Rightarrow a \mid b \pm c \end{aligned}$$

۲۸

$$\begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \quad (آ) \\ \xrightarrow{q^n=q'} b^n &= a^n q' \Rightarrow a^n \mid b^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow b = aq \\ c \mid d &\Rightarrow d = cq' \end{aligned} \right\} &\Rightarrow b \times d = (a \times c)(\underbrace{q \times q'}_{q''}) \quad (ب) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b \times d = a \times c \times q'' \Rightarrow ac \mid bd$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow a \mid mb \\ a \mid c &\Rightarrow a \mid nc \end{aligned} \right\} &\xrightarrow{a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c} a \mid mb \pm nc \quad (پ) \end{aligned}$$

۲۹

(آ) درست. اثبات: اگر a و $a+1$ اعداد صحیح متوالی باشند، آن‌گاه:

$$(a, a+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid a+1 \end{cases} \xrightarrow{-} d \mid (a+1) - a$$

$$\Rightarrow d \mid 1 \xrightarrow{d > 0} d = 1$$

$$۲ \mid ۲, ۲ \mid ۴ \rightarrow ۲ + ۲ \nmid ۲ + ۴ \quad (ب) \text{ نادرست. مثال نقض:}$$

(خ)

$$\frac{a}{b^r} + \frac{b}{a^r} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^r + b^r}{a^r b^r} \geq \frac{a+b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow a^r + b^r \geq ab(a+b) \Leftrightarrow a^r + b^r - a^r b - ab^r \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^r(a-b) - b^r(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^r - b^r) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b)(a+b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^r(a+b) \geq 0$$

$a, b \in \mathbb{R}^+$ بنابراین نامساوی فوق بدیهی است.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (د)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + 2\sqrt{ab} + b \geq 4\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (\text{بدیهی است})$$

$$x^4 + y^4 \geq x^3 y + x y^3 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - x^3 y - x y^3 \geq 0 \quad (ذ)$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x^3 - y^3)(x-y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^3 + xy^2 + y^3)(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x^3 + xy^2 + y^3) \geq 0$$

با توجه به این‌که x و y دو عدد حقیقی و مثبت هستند، نامساوی فوق بدیهی است.

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b) \quad (ر)$$

$$\xrightarrow{a+b > 0} a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{همواره درست}$$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 4 \quad (ز)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \xrightarrow{ab > 0} a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

چون به یک رابطهٔ بدیهی رسیدیم می‌توان گفت حکم برقرار است.

$$a^5 + b^5 > a^4 b + b^4 a \Leftrightarrow a^5 + b^5 - a^4 b - b^4 a > 0 \quad (س)$$

$$\Leftrightarrow a^4(a-b) - b^4(a-b) > 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^4 - b^4) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)(a^2 + b^2) > 0$$

سمت چپ نامساوی همواره درست است پس چون به یک رابطهٔ بدیهی رسیدیم می‌توان گفت حکم برقرار است.

۲۱

$$a = 0 \quad (پ) \quad \pm 1 \quad (ب) \quad -1, 1 \quad (آ)$$

$$|a| = p, |a| = 1 \quad (ث) \quad \text{طبیعی زوج}$$

۲۲

(آ) نادرست (برای هر عدد حقیقی $a \neq 0$ پس برای هر $n \in \mathbb{R}$ $(n^3 + 1) \neq 0$)

(ب) نادرست (هر عدد صحیحی مانند a ، بر اعداد صحیح 1 و -1 و خود عدد a بخش‌پذیر است. پس برای آن‌که عدد a فقط دو مقسوم‌علیه داشته باشد، باید $a = \pm 1$)

(پ) درست $(2 \mid a+b)$ ، پس $a+b$ زوج است. پس هر دوی a و b یا زوج هستند یا هر دو فرد. پس $a-b$ زوج است.)

$$\left. \begin{aligned} a+b \mid a \\ a+b \mid a+b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-} a+b \mid b \quad (ت) \text{ درست}$$

سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان خرداد ۹۸	آزمون شماره (۱)	

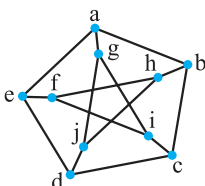
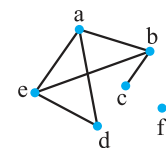
ردیف	سؤالات	نمره
۱	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (آ) یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد. (ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. (پ) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است. (ت) مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.	۲
۳	اگر باقی‌مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $3m - 5n$ بر ۱۳ را به‌دست آورید.	۱/۵
۴	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۵	با تبدیل معادله سیاله خطی $5x + 2y = 18$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۶	شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد. (آ) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. (ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید. (پ) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.	۱/۵
۷	گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (آ) یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی بنویسید. (ب) عدد احاطه‌گری C_7 را به‌دست آورید. (پ) دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم متمایز بنویسید.	۱/۵
۸	(آ) ثابت کنید هر مجموعه احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟ (ب) در گراف روبه‌رو یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.	۱/۵
۹	(آ) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. (ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	با ارقام ۱، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟	۱
۱۱	۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری‌که: (آ) به‌صورت یک در میان قرار بگیرند. (ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند. (پ) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5$ و $x_5 > 0$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	اگر سه دوست هم‌سایز، سه‌کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟	۱/۵
۱۴	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند.	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند، لاف ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	جمع نمره	۲۰

سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان شهریور ۹۸	آزمون شماره (۲)	

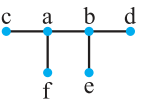
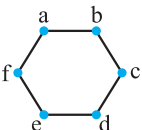
ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (آ) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. (ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را پر کنید. (آ) $[a \cdot b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط مقابل برقرار باشند: (ب) گراف G را می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. (پ) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با: (ت) هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیش‌تر در لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل کبوتر در آن قرار گرفته است.	۱/۵
۳	برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۱/۵
۴	اگر باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۳۰ بیابید.	۱/۵
۵	باقی‌مانده تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۳ بیابید.	۱/۵
۶	با تبدیل معادله سیاله خطی $29000x + 5000y = 29000$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۷	گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های زیر را در نظر بگیرید: $E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ (آ) نمودار گراف را رسم کنید. (ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید. (پ) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.	۲
۸	یک گراف ۵ رأسی غیر تهی k -منتظم رسم کنید، به طوری‌که: (آ) k بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. (ب) k کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
۹	(آ) گراف P_8 را رسم کنید. (ب) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید. (پ) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.	۱/۵
۱۰	در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید؛ سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.	۱
۱۱	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری‌که: (آ) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند. (ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. (پ) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ با شرط $x_1 \geq 4$ و $x_5 > 2$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	قرار است چهار مدرس T_1, T_2, T_3, T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3, C_4 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند، برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.	۱
۱۴	چند عدد طبیعی مانند n به طوری‌که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد؟	۱/۵
۱۵	۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند؛ نشان دهید که حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آن‌ها از هم کم‌تر از $\sqrt{8}$ باشد.	۱/۵
	جمع نمره	۲۰

سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان خرداد ۹۹	آزمون شماره (۳)	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. (آ) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱/۷۵
۲	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n 9k + 7$ ، $n 7k + 6$ ، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$	۱
۴	باقی مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۵
۵	معادله هم نهشتی $5x \equiv 2^{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (آ) مجموع درجه های رأس های هر گراف تعداد یال ها است. (ب) در یک گراف k -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است. (پ) در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر گراف G می نامیم. (ت) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم.	۱
۷	گراف G را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (آ) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. (ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. (پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.	۱/۲۵
۸	در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.	۰/۷۵
۹	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: (آ) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. (ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	عدد احاطه گری گراف مقابل را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱/۲۵
۱۱	با ارقام عدد ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟	۰/۷۵
۱۲	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱/۲۵
۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲، ۳، ۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.	۱

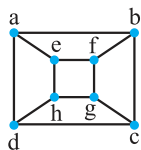
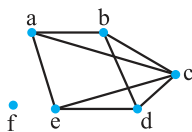


۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک																
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه		امتحان خرداد ۹۹																
		آزمون شماره (۳)																
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																
۱	(آ) نادرست (۰/۲۵) $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c, \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^c$ (۰/۲۵) (ب) درست (۰/۲۵) $(2k+1)^2 - 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1 - 1}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{4k(k+1)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{4 \times 2q}_{(۰/۲۵)} = 8q$	۱/۷۵																
۲	$a = 4q + 3 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow 2a + 3 = \underbrace{8q + 9}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{8(q+1) + 1}_{(۰/۲۵)} = 8q' + 1 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow r = 1 \text{ (۰/۲۵)}$	۱/۲۵																
۳	$n \mid 9k + 7 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow n \mid -63k - 49 + 63k + 54 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow n \mid 5 \text{ (۰/۲۵)} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1 \text{ یا } 5 \text{ (۰/۲۵)}$	۱																
۴	$7^2 = 49 \equiv 4 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \text{ (۰/۵)} \Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \text{ (۰/۲۵)} \xrightarrow{\times 7^2 \equiv 4 \text{ (۰/۲۵)}} 7^{30} \equiv 4 \text{ (۰/۲۵)}$	۱/۵																
۵	$2 \equiv 35 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow 5x \equiv 35 \text{ (۰/۲۵)} \xrightarrow{(5,11)=1 \text{ (۰/۲۵)}} x \equiv 7 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow x = 11k + 7 \text{ (۰/۲۵)}$	۱/۲۵																
۶	(آ) دو برابر (۰/۲۵) (ب) k (۰/۲۵) (پ) مینیمم (۰/۲۵) (ت) مینیمال (۰/۲۵)	۱																
۷	(آ) $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ (۰/۵) (ب) دور به طول ۴: a, b, e, d, a (۰/۲۵) (پ) مسیر به طول ۳: a, e, b, c (۰/۲۵) و مسیر به طول ۴: a, d, e, b, c (۰/۲۵)	۱/۲۵																
۸	$\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = p - 1 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow 9 + 12 = p - 1 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow p = 22 \text{ (۰/۲۵)}$	۰/۷۵																
۹	(آ) گراف روبه‌رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گر یکتا $\{a, b\}$ است. (۰/۲۵) رسم گراف (۰/۲۵)  (ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$ (۰/۲۵) رسم گراف (۰/۲۵) 	۱																
۱۰	برای گراف مورد سوال داریم $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = 2 \leq \gamma(G)$ احاطه‌گر برای گراف است (۰/۲۵). لذا $\gamma(G) \leq 3$ (۰/۲۵). بنابراین $\gamma(G) = 3$ (۰/۲۵)	۱/۲۵																
۱۱	$\frac{7!}{2! \times 3!} \text{ (۰/۵)} = 420 \text{ (۰/۲۵)}$	۰/۷۵																
۱۲	$x_1 + \dots + x_5 = 11, x_7 \geq 2, x_5 \geq 4 \text{ (۰/۲۵)}$ $x_1 + y_7 + 2 + x_7 + x_5 + y_5 + 4 = 11 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow x_1 + y_7 + x_7 + x_5 + y_5 = 5 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \text{جواب} = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} \text{ (۰/۵)}$	۱/۲۵																
۱۳	با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ (۰/۵) مربع لاتین به صورت مقابل داریم: (۰/۵) <table><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td></tr><tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr></table>	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱	۱
۳	۲	۱	۴															
۱	۴	۳	۲															
۴	۱	۲	۳															
۲	۳	۴	۱															

سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان شهریور ۹۹	آزمون شماره (۴)	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ داریم x و y ، (ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$ (پ) اگر $a \cdot b \in \mathbb{R}$ داریم $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$ (ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱
۲	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	۱/۲۵
۳	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a \mid 3n+4$ و $a \mid 2n+3$. نشان دهید $a = 1$	۱/۲۵
۴	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می‌شود.	۱/۵
۵	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۶	رقم یکان عدد $(2^{11} + 7)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۷	معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.	۱
۸	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید. (آ) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. (ب) سه دور به طول ۳ بنویسید. (پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ (ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. (ث) آیا گراف G همبند است؟	۲/۵
۹	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.	۱
۱۰	عدد احاطه‌گری گراف داده شده را مشخص کنید.	۱/۵
۱۱	هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۰/۷۵
۱۲	معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1 \geq 1$ و $x_3 > 3$ باشند؟	۱/۲۵
۱۳	یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.	۰/۵
	بخش انتخابی: دانش‌آموزان عزیز جهت کسب ۴ نمره باقی‌مانده فقط به ۴ سؤال به دلخواه پاسخ دهید.	
۱۴	فرض کنیم $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ ، $m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b^m$ ثابت کنید $a^n \equiv b^n$	۱
۱۵	آیا گراف ۷ رأسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۱
۱۶	گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۱



راهنمای تصحیح سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان شهریور ۹۹
	آزمون شماره (۴)

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	(آ) نادرست (۰/۲۵) (ب) درست (۰/۲۵) (پ) نادرست (۰/۲۵) (ت) نادرست (۰/۲۵)	۱
۲	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ (۰/۲۵)} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \text{ (۰/۲۵)} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (۰/۲۵)}$ نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است (۰/۲۵). اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۳	$\begin{aligned} a \mid 3n+4 &\Rightarrow a \mid \underbrace{-2(3n+4)}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{3(3n+3)}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow a \mid 1 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow a = \pm 1 \text{ (۰/۲۵)} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a = 1 \text{ (۰/۲۵)} \end{aligned}$	۱/۲۵
۴	هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $p = 6k(۱)$, $p = 6k+1(۲)$, $p = 6k+2 = 2(3k+1)(۳)$ (۰/۷۵) $p = 6k+3 = 3(2k+1)(۴)$, $p = 6k+4 = 2(3k+2)(۵)$, $p = 6k+5(۶)$ p در حالات (۱)، (۳)، و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش پذیر است (۰/۲۵) که با اول بودن p تناقض دارد. (۰/۲۵) بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود. (۰/۲۵)	۱/۵
۵	$\begin{aligned} m &= 17q + 5 \text{ (} q \in \mathbb{Z} \text{)} \\ n &= 17q' + 3 \text{ (} q' \in \mathbb{Z} \text{)} \end{aligned}$ (۰/۵) $\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5 \text{ (۰/۲۵)}$ $\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow r = 12 \text{ (۰/۲۵)}$	۱/۲۵
۶	$2^5 \equiv 2^1 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow 2^4 \equiv 2^0 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow 2^{11} \equiv 2^7 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 2^0 \text{ (۰/۲۵)}$ رقم یکان برابر ۵ است. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۷	$2x \equiv 19 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \xrightarrow{(2,5)=1} x \equiv 2 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow x = 5k + 2 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow y = -2k + 3 \text{ (۰/۲۵)}$	۱
۸	(آ) $\delta(G) = 0$, $\Delta(G) = 4$ (۰/۵) (ب) $c, a, b, c \text{ (۰/۲۵)}$, $c, a, e, c \text{ (۰/۲۵)}$, $c, e, d, c \text{ (۰/۲۵)}$ (پ) ۵ (۰/۲۵) (ت) $N_G(e) = \{a, c, d\}$ (۰/۷۵) (ث) خیر (۰/۲۵)	۲/۵
۹	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow p = 5 \text{ (۰/۲۵)}$ رسم گراف (۰/۲۵) 	۱
۱۰	با توجه به این که $\left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$ داریم $\gamma(G) \geq 2$ (۰/۲۵). لذا حداقل عدد احاطه گری ۲ است. (۰/۲۵) از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر است. (۰/۵). پس $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵) در نتیجه $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه گری). (۰/۲۵)	۱/۵
۱۱	(به راه حل $\binom{8}{4} \binom{4}{3} \binom{1}{1}$ نیز نمره داده شود.) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۰/۷۵